

**Список литературы:** 1. HP-Bypass Valve Type DRE; [www.ccivalve.com/pdf/333.pdf](http://www.ccivalve.com/pdf/333.pdf). 2. Kostenko Y., Lvov G., Gorash E., Altenbach H., Naumenko K. Power plant component design using creep-damage analysis. – In: Proceedings of IMECE2006: ASME Int. Mech. Eng. Congr. 2006. – 10 p. 3. Гораш Е.Н., Лысенко С.В., Львов Г.И. Неизотермическая ползучесть и повреждаемость элементов паровых турбин // Вісник НТУ «ХПІ»: Зб. наук.робіт. Темат. випуск: "Динаміка та міцність машин". – Вип. 21. – 2006. – С. 75-88.. 4. Kachanov L.M. Izvestiya Akad. Nauk. SSSR, Otd. Tekhn. Nauk. // Mechanics and Machine-building. – Vol. 8. – 1958. – PP. 26-31. 5. Rabotnov Y.N. The problems of strength of materials and structures // Moscow: Science, 1959. – PP. 5-7. 6. Hayhurst D.R. Computational continuum damage mechanics: its use in the prediction of creep in structures: past, present and future // Creep in Structures (ed. by Murakami, S. and Ohno, N.), Dordrecht, Kluwer, 2001. – PP. 175-188. 7. Perrin I.J., Hayhurst D.R. Creep constitutive equations for a 0.5Cr-0.5Mo-0.25V ferritic steel in the temperature range 600-675 °C // Journal of Strain Analysis. – Vol. 31, no. 4, ImechE. – 1996. – PP. 299-314. 8. Gorash E., Lvov G., Harder J., Kostenko Y., Wieghardt K. Comparative analysis of the creep behaviour in a power plant component using different material models // Creep and Fracture in High Temperature Components – Design and Life Assessment Issues, ECCC, IMechE, London, UK, 2005. – 12 p. 9. Leckie F.A., Hayhurst D.R. Constitutive equations for creep rupture, Acta Metallurgica, 25, Pergamon Press, 1977. – PP. 1059-1070.

*Поступила в редакцію 19.04.07*

УДК 621.82

**Г.Ю.МАРТЫНЕНКО**, канд.техн.наук, НТУ «ХПІ»

## **ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПОЛНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОДВЕСА РОТОРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ВЗАИМОСВЯЗАННЫХ МАГНИТОМЕХАНИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ РАУСА**

У роботі запропонована методика створення математичної моделі ротора на повному електромагнітному підвісі з керованими радіальними і осьовими електромагнітними підшипниками. Приведено методику розрахунку магнітних опорів ділянок магнітопроводів: для радіальних підшипників – восьмиполюсних статорів та цапф розташованих на роторі, а для осьового підшипнику – статора у вигляді броньового сердечника та замикаючого диска розташованого на роторі.

The method of the mathematical model creation for the full electromagnetic rotor bracket with controlled radial and axial electromagnetic bearings is offered. The design procedure of magnetic resistance for magnetic subcircuits is given. Namely, the eight-polar stators and pins on the rotor are proposed for the radial bearing, and the stator in the form of a cup core and shorting disk are proposed for the axial bearing.

**Введение.** Применение в качестве опор роторов бесконтактных управляемых электромагнитных подшипников (ЭМП) находит все более широкое применение ввиду их явного преимущества по сравнению с традиционными (отсутствие смазочных систем, повышение надежности, снижение потерь на трение, отсутствие механического изнашивания, сравнительно большой зазор и т.д.).

В настоящее время ЭМП используются в различных роторных машинах и агрегатах. Так, например, одна из ведущих в этой области фирм Societe de Mecanique Magnetique – S2M (Франция) [1] разрабатывает и поставляет ЭМП в качестве опор роторов турбомолекулярных насосов для создания вакуума, питательных насосов, генераторов, гидравлических турбин, металлорежущих станков (электрошпинделя), компрессоров нефтедобывающих станций и др.

На Украине внедрение ЭМП как опор роторов центробежных компрессоров газоперекачивающих агрегатов магистральных газопроводов производит ОАО «Сумское НПО им. М.В.Фрунзе». На сегодняшний день на нем уже изготовлено 25 тяжелых центробежных компрессоров с сухими газодинамическими уплотнениями и системами магнитных опор, но пока что зарубежно-го производства.

Как известно, принцип действия ЭМП состоит в том, что на катушки тех или иных полюсных наконечников статора подается питающее напряжение, создается электромагнитное поле и происходит притягивание подвешенного ротора к соответствующим полюсам электромагнита. За то, на какие катушки обмотки ЭМП подавать в настоящий момент напряжение отвечает система автоматического регулирования с отрицательной обратной связью, которая вырабатывает управляющий сигнал в зависимости от параметров регулирования – смещения ротора, его скорости и токов или потокосцеплений [2-3].

Совершенствование существующих и разработка новых вариантов управляемых электромагнитных подвесов невозможны без создания высококачественных систем управления, способных обеспечить устойчивость движения роторов в широком диапазоне возмущающих воздействий. Это может быть достигнуто за счет внедрения таких алгоритмов управления, которые при формировании сигнала управления учитывают значения всех параметров управления [4-5]. Усовершенствование алгоритмов управления и их апробация без проведения вариантных натуральных экспериментов, в свою очередь, невозможны без применения адекватных математических моделей.

Несмотря на многочисленные промышленные образцы ЭМП, на сегодняшний день в теоретическом плане перед разработчиками стоят следующие проблемы: адекватное математическое моделирование системы ротор – управляемые ЭМП и взаимосвязанных магнитомеханических явлений происходящих в ней; разработка и оптимизация методов и алгоритмов управления ЭМП; исследование динамического поведения системы с определением резонансных режимов и последующей отстройкой от них. Решению этих и других задач посвящено множество докладов на международных симпозиумах, патентов, а также публикаций в научных журналах. На сегодняшний день существует несколько монографий, в которых даны основные идеи, понятия, некоторые упрощенные методы построения и моделирования управляемого электромагнитного подвеса ротора и алгоритмов управления [6-8]. Однако, в большинстве из них моделирование магнитомеханической системы ротор-

ЭМП осуществляется с помощью дифференциальных уравнений движения и дифференциальных уравнений для токов в линейном приближении с ориентацией на применение линейных систем управления. При этом линейные модели подвеса строятся в предположении малости отклонений переменных (параметров управления) от их номинальных значений. В действительности эти отклонения могут быть значительными, а значит в предельных режимах – насыщение магнитной цепи, нулевой ток, нулевой зазор и т.д. линейная модель подвеса теряет смысл. Эти же недостатки присущи и физическим системам управления движением ротора, построенным на линеаризованных математических моделях, что приводит к увеличению времени отладки систем управления построенных на таких расчетных схемах.

Электромагнитный подвес – есть сложная электромагнитомеханическая система, в которой все процессы взаимосвязаны. Математическая модель, в полной мере учитывающая эту взаимосвязь, существенно нелинейна и достаточно сложна в разработке и практическом применении при проведении расчетных исследований. Поэтому в большинстве случаев, как указано выше, заведомо идут на применение линеаризованных математических моделей, что в конечном итоге позволяет обеспечить устойчивость движения ротора только в узком диапазоне отклонений ( $\sim 0,5$  номинального зазора). При этом необходимость использования «завышенного» значения номинального зазора приводит к повышению энергоемкости всего электромагнитного подвеса.

Таким образом, при создании адекватной математической модели должен быть соблюден разумный баланс между степенью линеаризации (нелинейности) и возможностью ее практического применения в расчетных исследованиях при определении параметров системы управления, позволяющих обеспечить устойчивость движения ротора в пределах всего зазора.

**1. Постановка задачи.** Целью данной работы является математическое описание полного электромагнитного подвеса ротора в ЭМП с адекватной передачей нелинейной взаимосвязи происходящих в такой системе процессов – электрических, магнитных и механических.

**2. Описание электромеханических систем уравнениями Рауса.** Технические электромеханические системы описываются уравнениями Лагранжа–Максвелла, имеющими структуру уравнений механики [9]. При рассмотрении преобразования электрического сигнала в механический, уравнения Лагранжа–Максвелла зачастую линеаризуются. Однако, такая линеаризация, как было указано выше, может привести к низкой степени адекватности исходной нелинейной модели и ее линеаризованного аналога.

В случае, когда токи проводимости замкнуты и в электрических ветвях отсутствуют конденсаторы, электромеханические системы описываются уравнениями, аналогичными уравнениям Рауса в механике [9]:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_r} = -\frac{\partial W}{\partial q_r} + Q_r, & (r = 1, \dots, M); \\ \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} + \sum_{s=1}^N r_{Cks} \frac{\partial W}{\partial \Psi_s} = E_k, & (k = 1, \dots, N), \end{cases} \quad (1)$$

где  $T$  – кинетическая энергия,  $\Pi$  – потенциальная энергия,  $W$  – энергия магнитного поля,  $q_r$  – обобщенные механические координаты,  $Q_r$  – непотенциальные обобщенные силы,  $M$  – число обобщенных механических координат,  $\Psi_k$  – потоки индукции (потокосцепления),  $N$  – число замкнутых неразветвленных контуров с контурными токами  $i_k$ ,  $r_{Cks}$  – активные сопротивления электрических контуров,  $E_k$  – алгебраическая сумма сторонних электродвижущих сил в  $k$ -том контуре, причем:

$$W = W(\Psi_1, \dots, \Psi_N, q_1, \dots, q_M);$$

$$\Psi_k = \frac{\partial W}{\partial i_k} = \sum_{s=1}^N L_{ks} i_s; \quad (2)$$

$$i_s = \frac{\partial W(\Psi_1, \dots, \Psi_N, q_1, \dots, q_M)}{\partial \Psi_s} = \sum_{k=1}^N L_{ks}^{-1} \Psi_k; \quad (s = 1, \dots, N),$$

где  $L_{ks} = L_{ks}(q_1, \dots, q_M)$  – коэффициенты само- и взаимной индукции контуров, а  $L_{ks}^{-1}$  – элементы матрицы обратной матрице с коэффициентами  $L_{ks}$  [9].

**2. Схема полного электромагнитного подвеса ротора.** Рассмотрим пространственную расчетную схему вращающегося абсолютно жесткого ротора на магнитном подвесе (рис. 1), который состоит из двух радиальных управляемых электромагнитных подшипников (ЭМП1 и ЭМП2) и одного осевого (ЭМП3). Для однозначного позиционирования ротора в пространстве введем неподвижную прямоугольную правую систему координат, начало которой  $O^*$  расположено на геометрической продольной оси ротора, находящегося в центральном положении по отношению к полюсам статоров ЭМП1 и ЭМП2. Оси координат свяжем с ротором в данном положении так: ось  $O^*z$  – совпадает с геометрической продольной осью ротора, оси  $O^*x$  и  $O^*y$  проходят через геометрический центр поперечного сечения, проходящего через центр тяжести ротора  $C$ , при этом  $O^*x$  направлена горизонтально, а  $O^*y$  – вертикально (рис. 1). Обозначим для ротора в некотором произвольном положении через  $O(x_0, y_0, z_0)$  геометрический центр поперечного сечения, проходящего через центр тяжести ротора, а центры опорных участков ротора на ЭМП1 и ЭМП2 в осях  $x$  и  $y$  через  $O_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $O_2(x_2, y_2, z_2)$  соответственно (рис.1), причем расстояние между  $O$  и  $O_1$  равно  $l_1$ , а между  $O$  и  $O_2$  равно  $l_2$ .

Для определения положения ротора могут использоваться две группы обобщенных координат  $\xi = (x_0, y_0, z_0, \theta_x, \theta_y)$  – координаты центра сечения, проходящего через центр масс  $C$  и углы поворотов вокруг осей  $x$  и  $y$  или

$q = (x_1, y_1, x_2, y_2, z_3)$  – координаты точек  $O_1$ ,  $O_2$  и координата  $z$  точки  $O_3$ .

Связи между обобщенными координатами можно установить, используя уравнение оси ротора – линии в пространстве, направляющие косинусы и проекции направленных отрезков на оси координат [10].

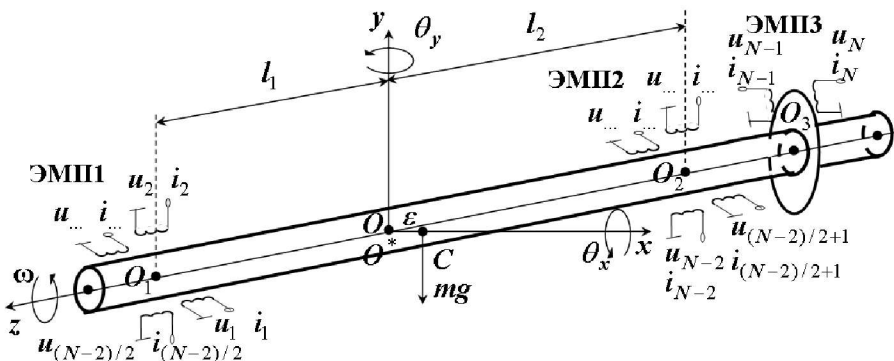


Рисунок 1 – Пространственная расчетная схема вращающегося абсолютно жесткого ротора на магнитном подвесе

### 3. Механическая часть математической модели «ротор на ЭМП».

Механическая часть математической модели вращающегося абсолютно жесткого ротора на управляемых электромагнитных опорах, при числе обобщенных механических координат  $M = 5$ , в общем случае описывается системой 5 дифференциальных уравнений 2-го порядка [10, 11]:

$$\begin{cases} m \left( \frac{d^2 x_0}{dt^2} \right) = -\frac{\partial W}{\partial x_0} + Q_x + m\omega^2 (\varepsilon_1 \cos \omega t - \varepsilon_2 \sin \omega t); \\ m \left( \frac{d^2 y_0}{dt^2} \right) = -\frac{\partial W}{\partial y_0} + Q_y + m\omega^2 (\varepsilon_1 \sin \omega t + \varepsilon_2 \cos \omega t); \\ m \left( \frac{d^2 z_0}{dt^2} \right) = -\frac{\partial W}{\partial z_0} + Q_z; \\ J_e \left( \frac{d^2 \theta_x}{dt^2} \right) + J_p \omega \left( \frac{d\theta_y}{dt} \right) = -\frac{\partial W}{\partial \theta_x} + Q_{\theta x} + (J_e - J_p) \omega^2 (\gamma_1 \cos \omega t - \gamma_2 \sin \omega t); \\ J_e \left( \frac{d^2 \theta_y}{dt^2} \right) - J_p \omega \left( \frac{d\theta_x}{dt} \right) = -\frac{\partial W}{\partial \theta_y} + Q_{\theta y} + (J_e - J_p) \omega^2 (\gamma_1 \sin \omega t + \gamma_2 \cos \omega t), \end{cases} \quad (3)$$

где  $m$  – масса ротора,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  – линейные и угловые параметры неуравновешенности (упрощая, можно считать, что  $\varepsilon_1 = \varepsilon$ ,  $\varepsilon_2 = 0$  и  $\gamma_1 = 0$ ;  $\gamma_2 = \gamma$ ),  $J_e$ ,  $J_p$  – экваториальный и полярный моменты инерции ротора,  $\omega$  – угловая

**4. Вариант модели полного магнитного подвеса ротора.** Форма записи уравнений составляющих электромагнитную часть математической модели «ротор на ЭМП» зависит от геометрии магнитных цепей радиальных и осевых ЭМП, схем соединения катушек и направления магнитных потоков в теле ротора относительно его продольной оси [8].

The diagram illustrates a three-link manipulator. The first link is a cylinder of length  $l_1$  rotating about a vertical  $z$ -axis with angular velocity  $\omega$ . Its center of mass is at  $O_1(x_1, y_1, z_1)$ . The second link is a disk of length  $l_2$  rotating about a horizontal  $x$ -axis with angular velocity  $\theta_x$ . Its center of mass is at  $O_2(x_2, y_2, z_2)$ . The third link is a cylinder of length  $l_3$  translating along the  $x$ -axis. Its center of mass is at  $O_3(x_3, y_3, z_3)$ . The base joint is revolute (ЭМП1), the joint between the second and third links is prismatic (ЭМП2), and the end effector joint is prismatic (ЭМП3). A coordinate system  $(x, y, z)$  is centered at the origin  $O(x_0, y_0, z_0)$ . The center of mass of the second link is at  $C$  with a distance  $\varepsilon$  from the joint. Gravity  $mg$  acts downwards.

112

Геометрия радиальных ЭМП1 и ЭМП2 показаны на рис. 4, где 1 – пакет шихтованного железа статора, 2 – полюса и полюсные катушки, 3 – электромагниты, образованные попарным соединением полюсных катушек, 4 – направление магнитного потока, 5 – ротор в центральном положении, 6 – номинальный воздушный зазор ( $\delta_{r1}$  и  $\delta_{r2}$ ) – при центральном положении ротора.

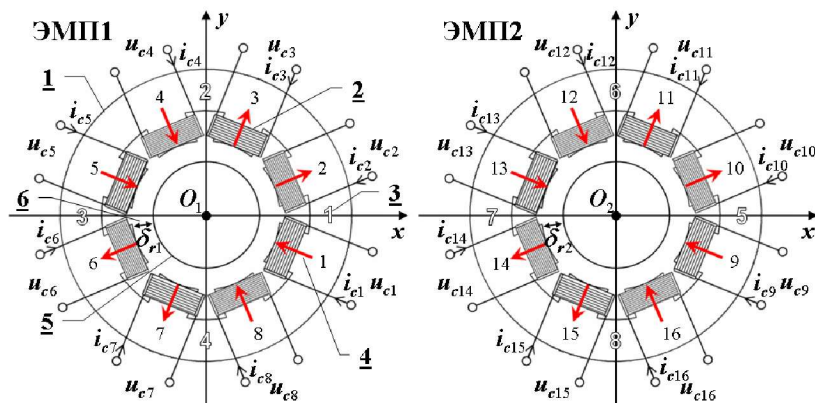


Рисунок 4 – Геометрия и схема магнитной цепи радиальных ЭМП

На рис. 4 приведены радиальные ЭМП классического вида – с поперечным направлением потока по отношению к оси ротора. Такой вариант конструкции более прост в изготовлении и имеет меньшие продольные размеры по сравнению с ЭМП с продольным направлением потока. Поэтому методика построения математической модели будет продемонстрирована именно для этого варианта конструкции радиальных ЭМП.

В данном случае статоры радиальных ЭМП представляют собой восьми-полюсники с номерами полюсов 1-8 (ЭМП1) и 9-16 (ЭМП2). На каждом полюсном наконечнике размещены полюсные катушки, которые для образования в каждом из радиальных ЭМП четырех электромагнитов могут соединяться попарно последовательно или параллельно. С помощью такого попарного соединения можно обеспечить либо два горизонтально (1-2, 5-6, в ЭМП1 и 9-10, 13-14 в ЭМП2) и два вертикально (3-4, 7-8 в ЭМП1 и 11-12, 15-16 в ЭМП2) расположенных электромагнита, либо четыре электромагнита расположенных под  $45^\circ$  к осям  $x$  и  $y$  (2-3, 4-5, 6-7, 8-1 в ЭМП1 и 10-11, 12-13, 14-15, 16-9 в ЭМП2). В данном случае будет рассматриваться первый вариант.

На каждую полюсную катушку системой управления подается управляющее напряжения  $u_{ck}$ , величина которого определяется в соответствии с применяемым алгоритмом управления в зависимости от параметров регулирования – значений обобщенных координат [3].

При протекании тока  $i_{ck}$  через обмотку  $k$ -ой полюсной катушки с количе-

ством витков  $w_k$  и активным сопротивлением  $r_{ck}$  возникает магнитодвижущая сила (МДС)  $e_k = w_k i_{ck}$ , которая вызывает магнитный поток в магнитной цепи ЭМП. Для того чтобы направления магнитных потоков образовывали последовательность полярностей NS-SN-NS-SN, МДС рядом расположенных полюсных катушек двух соседних электромагнитов должны иметь одинаковое направление. Следует также помнить, что направление магнитного потока, возникающего при протекании тока в катушке, зависит от направления тока в витках этой катушки, то есть от направления тока в проводнике катушки и от направления навивки катушки. На рис. 4 показан один из возможных вариантов направлений МДС и магнитных потоков. Именно этот вариант и рассматривается при построении математической модели ротора на ЭМП.

Четыре электромагнита в радиальных ЭМП1,2 (1-4, 5-8 на рис. 4) могут быть реализованы с помощью одной из двух возможных схем попарного соединения катушек – последовательного или параллельного (рис. 5).

При последовательном соединении катушек (рис. 5, а) для токов, напряжений и активных сопротивлений справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} i_{c2k} &= i_{c2k-1} = i_k; \\ u_{c2k} + u_{c2k-1} &= u_k; \quad \text{где } k = 1, \dots, 4 \text{ (ЭМП1) и } k = 5, \dots, 8 \text{ (ЭМП2),} \\ r_{c2k} + r_{c2k-1} &= r_k; \end{aligned} \quad (4)$$

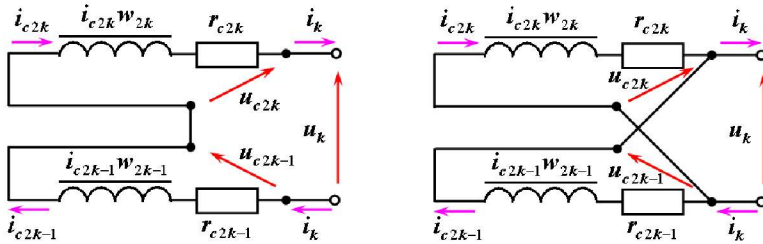


Рисунок 5 – Схемы соединения катушек радиальных ЭМП:  
а – последовательное соединение, б – параллельное соединение

При параллельном соединении катушек (рис. 5, б) имеем:

$$\begin{aligned} i_{c2k} + i_{c2k-1} &= i_k; \\ u_{c2k} &= u_{c2k-1} = u_k; \quad \text{где } k = 1, \dots, 4 \text{ (ЭМП1) и } k = 5, \dots, 8 \text{ (ЭМП2).} \\ \frac{1}{r_{c2k}} + \frac{1}{r_{c2k-1}} &= \frac{1}{r_k}; \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь  $k = 1..4$  и  $5..8$  представляет собой номера электромагнитов ЭМП1 и ЭМП2 соответственно,  $2k-1$  и  $2k$  – номера полюсов и полюсных катушек.

Геометрия и схемы магнитных цепей осевого ЭМП3 показаны на рис. 6, где 1 – статор, 2 – полюса и полюсные катушки, 3 – два электромагнита (9) и



10), 4 – направление магнитного потока, 5 – ротор в центральном положении, 6 – диск осевого ЭМП, расположенный на роторе, 7 – номинальный воздушный зазор между статором и диском осевой опоры с каждой стороны при центральном положении ротора ( $\delta_a$ ).

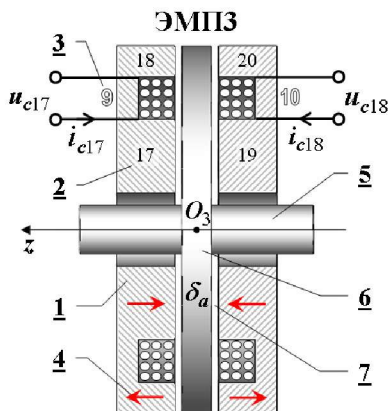


Рисунок 6 – Геометрия и схема магнитной цепи осевого ЭМП

Статоры осевого ЭМП представляют собой броневые сердечники, выполненные из стали, каждый с двумя полюсами – внутренним и наружным: 17-18 и 19-20 соответственно. Между полюсами статоров ЭМПЗ расположены катушки с токами в проводниках этих катушек  $i_{c17}$  и  $i_{c18}$  (где  $i_{c17} = i_9$  и  $i_{c18} = i_{10}$ ). На каждую полюсную катушку системой управления подается управляющее напряжения  $u_{c17}$  и  $u_{c18}$  (где  $u_{c17} = u_9$  и  $u_{c18} = u_{10}$ ). Активные сопротивления двух катушек ЭМПЗ –  $r_{c17} = r_9$  и  $r_{c18} = r_{10}$  соответственно.

**5. Эквивалентные схемы замещения электромагнитных цепей радиальных ЭМП.** Определение магнитных потоков в магнитной цепи радиального ЭМП может быть произведено на основе рассмотрения ее эквивалентной схемы, представленной на рис. 7.

На рис. 7 приняты следующие обозначения: 1) Магнитные потоки:  $\Phi_1, \dots, \Phi_8$  – через сечения полюсов, на которых расположены катушки,  $\Phi_9, \dots, \Phi_{16}$  – через воздушные зазоры под полюсами,  $\Phi_{17}, \dots, \Phi_{24}$  – через ярмо статора,  $\Phi_{25}, \dots, \Phi_{32}$  – рассеяния через воздушные зазоры между полюсами статора,  $\Phi_{33}, \dots, \Phi_{40}$  – через цапфу, расположенную на роторе,  $\Phi_{c1}, \dots, \Phi_{c16}$  – контурные; 2) Магнитные сопротивления:  $R_{p1}, \dots, R_{p8}$  – полюсов,  $R_{g1}, \dots, R_{g8}$  – воздушных зазоров между полюсами и ротором,  $R_{s1}, \dots, R_{s8}$  – участков ярма статора между двумя полюсами,  $R_{л1}, \dots, R_{л8}$  – рассеяния между полюсами (воздушных зазоров),  $R_{a1}, \dots, R_{a8}$  – участков ротора; 3) Магнитодвижущие силы катушек:  $e_1 = i_{c1} w_1, \dots, e_8 = i_{c8} w_8$ .

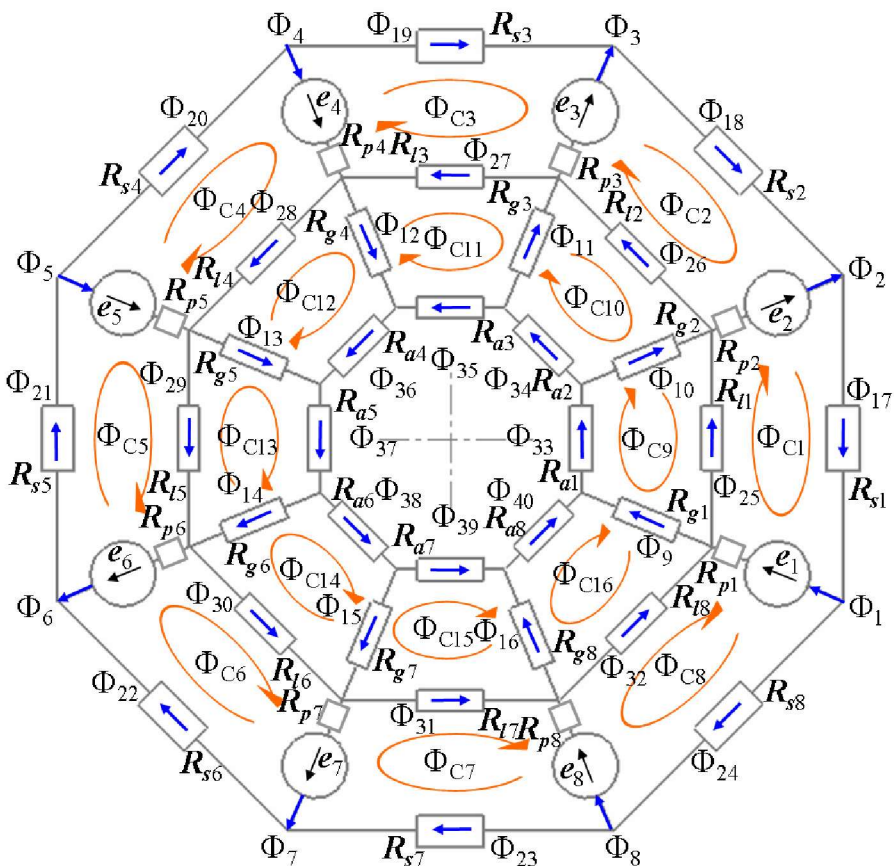


Рисунок 7 – Эквивалентная схема замещения электромагнитной цепи ЭМПТ

Расчет магнитной цепи радиального ЭМПТ (рис. 4) может быть выполнен на основе закона подобия второму закону Кирхгофа для электрических цепей с использованием схемы замещения (рис. 7). Применяя метод контурных потоков (аналог метода контурных токов) [12], приходим к системе алгебраических уравнений относительно контурных потоков:

$$\begin{cases}
 \Phi_{C1}(R_{s1} + R_{p1} + R_{l1} + R_{p2}) - \Phi_{C8}R_{p1} - \Phi_{C9}R_{l1} - \Phi_{C2}R_{p2} = i_{c1}w_1 + i_{c2}w_2; \\
 \Phi_{C2}(R_{s2} + R_{p2} + R_{l2} + R_{p3}) - \Phi_{C1}R_{p2} - \Phi_{C10}R_{l2} - \Phi_{C3}R_{p3} = -i_{c2}w_2 + i_{c3}w_3; \\
 \Phi_{C3}(R_{s3} + R_{p3} + R_{l3} + R_{p4}) - \Phi_{C2}R_{p3} - \Phi_{C11}R_{l3} - \Phi_{C4}R_{p4} = -i_{c3}w_3 - i_{c4}w_4; \\
 \Phi_{C4}(R_{s4} + R_{p4} + R_{l4} + R_{p5}) - \Phi_{C3}R_{p4} - \Phi_{C12}R_{l4} - \Phi_{C5}R_{p5} = i_{c4}w_4 - i_{c5}w_5; \\
 \Phi_{C5}(R_{s5} + R_{p5} + R_{l5} + R_{p6}) - \Phi_{C4}R_{p5} - \Phi_{C13}R_{l5} - \Phi_{C6}R_{p6} = i_{c5}w_5 + i_{c6}w_6; \\
 \Phi_{C6}(R_{s6} + R_{p6} + R_{l6} + R_{p7}) - \Phi_{C5}R_{p6} - \Phi_{C14}R_{l6} - \Phi_{C7}R_{p7} = -i_{c6}w_6 + i_{c7}w_7; \\
 \Phi_{C7}(R_{s7} + R_{p7} + R_{l7} + R_{p8}) - \Phi_{C6}R_{p7} - \Phi_{C15}R_{l7} - \Phi_{C8}R_{p8} = -i_{c7}w_7 - i_{c8}w_8; \\
 \Phi_{C8}(R_{s8} + R_{p8} + R_{l8} + R_{p1}) - \Phi_{C7}R_{p8} - \Phi_{C16}R_{l8} - \Phi_{C1}R_{p1} = i_{c8}w_8 - i_{c1}w_1;
 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\Phi_{C9}(R_{l1} + R_{g1} + R_{a1} + R_{g2}) - \Phi_{C16}R_{g1} - \Phi_{C1}R_{l1} - \Phi_{C10}R_{g2} = 0; \\
\Phi_{C10}(R_{l2} + R_{g2} + R_{a2} + R_{g3}) - \Phi_{C9}R_{g2} - \Phi_{C2}R_{l2} - \Phi_{C11}R_{g3} = 0; \\
\Phi_{C11}(R_{l3} + R_{g3} + R_{a3} + R_{g4}) - \Phi_{C10}R_{g3} - \Phi_{C3}R_{l3} - \Phi_{C12}R_{g4} = 0; \\
\Phi_{C12}(R_{l4} + R_{g4} + R_{a4} + R_{g5}) - \Phi_{C11}R_{g4} - \Phi_{C4}R_{l4} - \Phi_{C13}R_{g5} = 0; \\
\Phi_{C13}(R_{l5} + R_{g5} + R_{a5} + R_{g6}) - \Phi_{C12}R_{g5} - \Phi_{C5}R_{l5} - \Phi_{C14}R_{g6} = 0; \\
\Phi_{C14}(R_{l6} + R_{g6} + R_{a6} + R_{g7}) - \Phi_{C13}R_{g6} - \Phi_{C6}R_{l6} - \Phi_{C15}R_{g7} = 0; \\
\Phi_{C15}(R_{l7} + R_{g7} + R_{a7} + R_{g8}) - \Phi_{C14}R_{g7} - \Phi_{C7}R_{l7} - \Phi_{C16}R_{g8} = 0; \\
\Phi_{C16}(R_{l8} + R_{g8} + R_{a8} + R_{g1}) - \Phi_{C15}R_{g8} - \Phi_{C8}R_{l8} - \Phi_{C9}R_{g1} = 0.
\end{array} \right. \quad (6)$$

Решение данной системы алгебраических уравнений позволяет найти контурные потоки, через которые легко могут быть определены и потоки во всех ветвях [12]. Так потоки несмежных ветвей равны контурным потокам, если их направления совпадают, и равны контурным потокам с обратным знаком, если не совпадают. Также определяются и потоки несмежных ветвей.

Тогда, в соответствии со схемой замещения (рис. 7), получаем:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \Phi_{C1} - \Phi_{C8}; \quad \Phi_9 = \Phi_{C9} - \Phi_{C16}; \quad \Phi_{17} = \Phi_{C1}; \quad \Phi_{25} = \Phi_{C1} - \Phi_{C9}; \quad \Phi_{33} = \Phi_{C9}; \\
\Phi_2 &= \Phi_{C1} - \Phi_{C2}; \quad \Phi_{10} = \Phi_{C9} - \Phi_{C10}; \quad \Phi_{18} = \Phi_{C2}; \quad \Phi_{26} = \Phi_{C2} - \Phi_{C10}; \quad \Phi_{34} = \Phi_{C10}; \\
\Phi_3 &= \Phi_{C2} - \Phi_{C3}; \quad \Phi_{11} = \Phi_{C10} - \Phi_{C11}; \quad \Phi_{19} = \Phi_{C3}; \quad \Phi_{27} = \Phi_{C3} - \Phi_{C11}; \quad \Phi_{35} = \Phi_{C11}; \\
\Phi_4 &= \Phi_{C4} - \Phi_{C3}; \quad \Phi_{12} = \Phi_{C12} - \Phi_{C11}; \quad \Phi_{20} = \Phi_{C4}; \quad \Phi_{28} = \Phi_{C4} - \Phi_{C12}; \quad \Phi_{36} = \Phi_{C12}; \\
\Phi_5 &= \Phi_{C5} - \Phi_{C4}; \quad \Phi_{13} = \Phi_{C13} - \Phi_{C12}; \quad \Phi_{21} = \Phi_{C5}; \quad \Phi_{29} = \Phi_{C5} - \Phi_{C13}; \quad \Phi_{37} = \Phi_{C13}; \\
\Phi_6 &= \Phi_{C5} - \Phi_{C6}; \quad \Phi_{14} = \Phi_{C13} - \Phi_{C14}; \quad \Phi_{22} = \Phi_{C6}; \quad \Phi_{30} = \Phi_{C6} - \Phi_{C14}; \quad \Phi_{38} = \Phi_{C14}; \\
\Phi_7 &= \Phi_{C6} - \Phi_{C7}; \quad \Phi_{15} = \Phi_{C14} - \Phi_{C15}; \quad \Phi_{23} = \Phi_{C7}; \quad \Phi_{31} = \Phi_{C7} - \Phi_{C15}; \quad \Phi_{39} = \Phi_{C15}; \\
\Phi_8 &= \Phi_{C8} - \Phi_{C7}; \quad \Phi_{16} = \Phi_{C16} - \Phi_{C15}; \quad \Phi_{24} = \Phi_{C8}; \quad \Phi_{32} = \Phi_{C8} - \Phi_{C16}; \quad \Phi_{40} = \Phi_{C16}.
\end{aligned} \quad (7)$$

Для нахождения магнитных сопротивлений входящих в выражения этих потоков рассмотрим схему путей магнитных потоков (рис. 8).

На рис. 8 введены следующие обозначения геометрических параметров:  $D_{out1}, D_{in1}, D_{m1} = (D_{out1} + D_{in1})/2$  – внешний, внутренний и средний диаметры ярма статора,  $d_{out1}, d_{in1}, d_{m1} = (d_{out1} + d_{in1})/2$  – внешний, внутренний и средний диаметры цапфы, расположенной на роторе,  $D_{p1} = d_{out1} + \delta_{r1}$  – внутренний диаметр скругления полюсных наконечников,  $h_{pk}$  – толщина полюсных наконечников,  $\alpha_{mk}$  – средняя угловая координата  $k$ -го полюса, которая находится через угловые координаты начала и конца полюса  $(\alpha_{Bk} + \alpha_{Ek})/2$ , точки  $A_1, \dots, A_8$  – границы участков путей магнитных потоков в ЭМП1. Толщина пакета железа статора радиального ЭМП1 определяется его начальной  $z_{B1}$  и конечной  $z_{E1}$  координатами по оси  $z$  как  $H_{s1} = z_{E1} - z_{B1}$  (см. [10]).

Магнитные сопротивления участков магнитной цепи ЭМП1 (рис. 8):

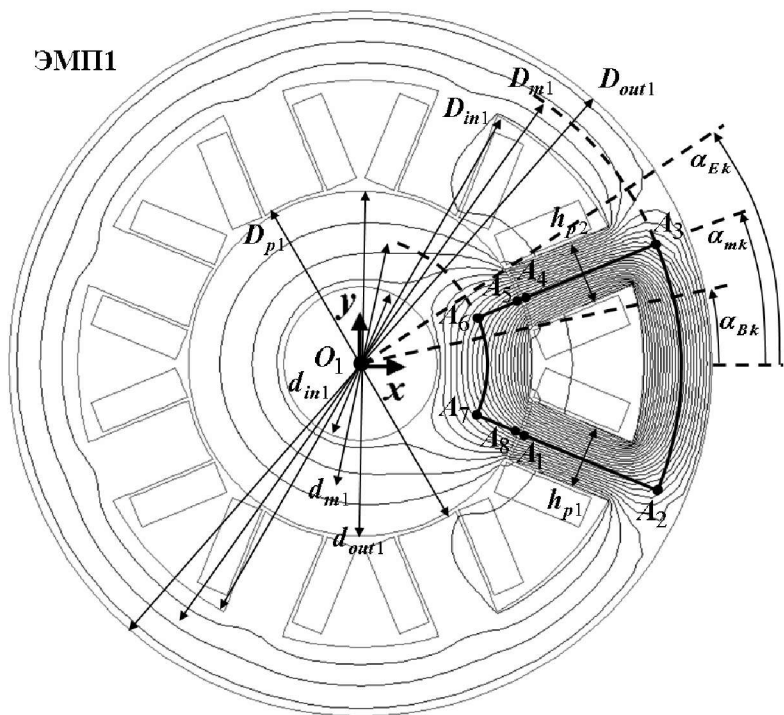


Рисунок 8 – Схематизация путей магнитных потоков в радиальном ЭМП1

1) полюсных наконечников (участки  $A_1A_2, A_3A_4$ ):

$$R_{pk} = (D_{m1} - D_{p1}) / (2\mu_0\mu S_{pk}); \quad S_{pk} = H_{s1}h_{pk} \quad (k = 1, \dots, 8), \quad (8)$$

где  $S_{pk}$  – площадь поперечного сечения полюсного наконечника;

2) участков ярма статора между полюсными наконечниками ( $A_2A_3$ ):

$$R_{sk} = (\alpha_{mk+1} - \alpha_{mk})D_{m1} / (2\mu_0\mu S_{s1}); \quad S_{s1} = H_{s1}(D_{out1} - D_{in1}) / 2 \quad (k = 1, \dots, 8), \quad (9)$$

где  $S_{s1}$  – площадь поперечного сечения кольцевого участка статора ЭМП1 между двумя соседними полюсными наконечниками (ярма);

3) сектора цапфы в окружном направлении (участок  $A_6A_7$ ):

$$R_{ak} = (\alpha_{mk+1} - \alpha_{mk})d_{m1} / (2\mu_0\mu S_{a1}); \quad S_{a1} = H_{s1}(d_{out1} - d_{m1}) / 2 \quad (k = 1, \dots, 8), \quad (10)$$

где  $S_{a1}$  – площадь поперечного сечения кольцевого пакета железа (цапфы);

4) воздушного зазора под  $k$ -м полюсом и сектора цапфы в радиальном направлении (участки  $A_1A_8$  и  $A_8A_7$  или  $A_4A_5$  и  $A_5A_6$ ):

$$R_{gk} = \frac{1}{g_{gk}} + \frac{d_{out1} - d_{m1}}{2\mu_0\mu S_{pk}}, \quad g_{gk} = \mu_0 \int_{S_k} \frac{dS}{h} \quad (k = 1, \dots, 8), \quad (11)$$

где  $g_{gk}$  – магнитная проводимость зазора под  $k$ -м полюсом,  $h$  – высота зазора под элементарной площадью полюса  $dS$ . Для ЭМП1 магнитная проводимость зазора под  $k$ -м полюсным наконечником может определяться с учетом или без учета взаимовлияния смещений в радиальном и осевом направлениях по формуле [10]:

$$g_{gk}(x_1, y_1, x_2, y_2, z_3) = \frac{\mu_0(d_{out1} + \delta_{r1})}{2} \int_{z_{B1}}^{z_{E1}} \int_{\alpha_{Bk}}^{\alpha_{Ek}} \frac{d\alpha dz}{h_{xy1}(\alpha, z)} \quad (k=1, \dots, 8), \quad (12)$$

где высота зазора  $h_{xy1}(\alpha, z)$  под  $dS$  в первом случае зависит еще и от обобщенных координат  $x_1, y_1, x_2, y_2, z_3$ , а во втором только от  $x_1, y_1$ . Обоснование границ применимости упрощенных выражений  $h_{xy1}(\alpha, z)$  дано в [10].

5) рассеяния между соседними полюсными наконечниками статора (участок между линиями  $A_1A_2$  и  $A_3A_4$ ):

$$R_{lk} = 1/g_{lk}, \quad (k=1, \dots, 8), \quad (13)$$

где  $g_{lk}$  – магнитная проводимость воздушного зазора между  $k$ -м и  $k+1$ -м полюсами, которая может быть приближенно определена как проводимость между двумя непараллельными поверхностями по формуле [13, стр. 116]:

$$g_{lk} \approx \frac{\mu_0 H_{s1}}{(\alpha_{Ek} - \alpha_{Bk+1})} \int_{D_{p1/2}}^{D_{m1/2}} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0 H_{s1}}{(\alpha_{Ek} - \alpha_{Bk+1})} \ln \frac{D_{m1}}{D_{p1}} \quad (k=1, \dots, 8). \quad (14)$$

Проводимости рассеяния или сопротивления рассеяния магнитного потока между полюсами статора могут быть определены также и с использованием дискретной расчетной модели магнитопровода реализующейся с помощью разбивки межполюсного пространства на элементарные объемы [14].

В случае уточнения местоположения путей усредненных магнитных потоков рассеяния ( $\Phi_{25}, \dots, \Phi_{32}$  на рис. 7) магнитные сопротивления участков могут быть перераспределены между магнитными сопротивлениями полюсов  $R_{p1}, \dots, R_{p8}$  и воздушных зазоров  $R_{g1}, \dots, R_{g8}$  включением во вторые части исключенной из первых.

Определение магнитных потоков  $\Phi_{41}, \dots, \Phi_{80}$  в магнитной цепи радиального ЭМП2 может быть выполнено с использованием такого же подхода на основе рассмотрения схемы замещения и схемы путей магнитных потоков в ЭМП2 аналогичных тем, которые приведены на рис. 7 и 8 для ЭМП1.

**6. Эквивалентная схема замещения электромагнитной цепи осевого ЭМП.** Магнитная цепь осевого ЭМП3 может быть замещена схемой приведенной на рис. 9.

На рис. 9 приняты следующие обозначения: 1) Магнитные потоки:  $\Phi_{81}, \Phi_{82}$  – через сечения полюсов и ярмо статора,  $\Phi_{83}, \dots, \Phi_{86}$  – через воздушные зазоры под полюсами,  $\Phi_{87}, \Phi_{88}$  – рассеяния через пазы между полюсами статора, заполненные медным проводом,  $\Phi_{89}$  – через диск, расположенный на

роторе,  $\Phi_{C33}, \dots, \Phi_{C36}$  – контурные; 2) Магнитные сопротивления:  $R_{p17}, \dots, R_{p20}$  – полюсов,  $R_{g17}, \dots, R_{g20}$  – воздушных зазоров между полюсами и диском,  $R_{s17}, R_{s18}$  – ярма статора между двумя полюсами,  $R_{l17}, R_{l18}$  – рассеяния между полюсами (пазов заполненных медью),  $R_{a17} = R_{a18}$  – диска; 3) Магнитодвижущие силы катушек:  $e_{17} = i_{c17} w_{17}, e_{18} = i_{c18} w_{18}$ .

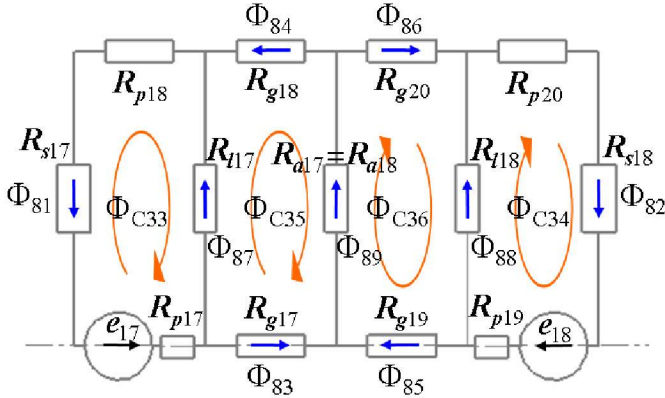


Рисунок 9 – Эквивалентная схема замещения электромагнитной цепи ЭМПЗ

Расчет магнитной цепи осевого ЭМПЗ (рис. 6) может быть выполнен с использованием схемы замещения (рис. 9). Применяя метод контурных потоков, приходим к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \Phi_{C33}(R_{s17} + R_{l17} + R_{p17} + R_{p18}) - \Phi_{C35}R_{l17} = -i_{c17}w_{17}; \\ \Phi_{C34}(R_{s18} + R_{l18} + R_{p19} + R_{p20}) - \Phi_{C36}R_{l18} = i_{c18}w_{18}; \\ \Phi_{C35}(R_{l17} + R_{a17} + R_{g17} + R_{g18}) - \Phi_{C33}R_{l17} - \Phi_{C36}R_{a17} = 0; \\ \Phi_{C36}(R_{l18} + R_{a18} + R_{g19} + R_{g20}) - \Phi_{C34}R_{l18} - \Phi_{C35}R_{a18} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Решение данной системы алгебраических уравнений позволяет найти контурные потоки и через них потоки во всех ветвях:

$$\begin{aligned} \Phi_{81} &= -\Phi_{C33}; & \Phi_{84} &= -\Phi_{C35}; & \Phi_{87} &= \Phi_{C35} - \Phi_{C33}; \\ \Phi_{82} &= \Phi_{C34}; & \Phi_{85} &= \Phi_{C36}; & \Phi_{88} &= \Phi_{C34} - \Phi_{C36}; \\ \Phi_{83} &= -\Phi_{C35}; & \Phi_{86} &= \Phi_{C36}; & \Phi_{89} &= \Phi_{C36} - \Phi_{C35}. \end{aligned} \quad (16)$$

Для нахождения магнитных сопротивлений, входящих в выражения этих потоков, рассмотрим схему путей магнитных потоков (рис. 10).

На рис. 10 введены следующие обозначения геометрических параметров:  $D_{out3+}$ ,  $D_{in3+}$  и  $D_{out3-}$ ,  $D_{in3-}$  – внешние и внутренние диаметры двух частей статора (символом «+» в индексе обозначена часть статора, расположенная со стороны положительного направления оси  $z$  относительно диска, а символом «-» – со стороны отрицательного),  $D_{w3+}$ ,  $d_{w3+}$  и  $D_{w3-}$ ,  $d_{w3-}$  – диаметры пазов, в

которых размещаются обмотки,  $h_{w3+}$  и  $h_{w3-}$  – высота пазов,  $D_{m3\pm} = (D_{out3\pm} + D_{w3\pm})/2$  и  $d_{m3\pm} = (d_{w3\pm} + D_{in3\pm})/2$  – средние диаметры полюсов двух частей статора,  $H_{s3+}$ ,  $H_{s3-}$  – высота одной и второй частей статора,  $H_{p3}$  – расстояние между полюсами двух частей статора осевого ЭМПЗ, которое определяется начальной координатой  $z_{B3-}$  по оси  $z$  одной части статора и конечной координатой  $z_{E3+}$  второй, как  $H_{p3} = z_{E3+} - z_{B3-}$  (см. [10]),  $h_{d3}$  – толщина диска, причем  $h_{d3} = H_{p3} - 2\delta_a$ , точки  $A_1, \dots, A_8$  – границы участков путей магнитных потоков в ЭМПЗ.

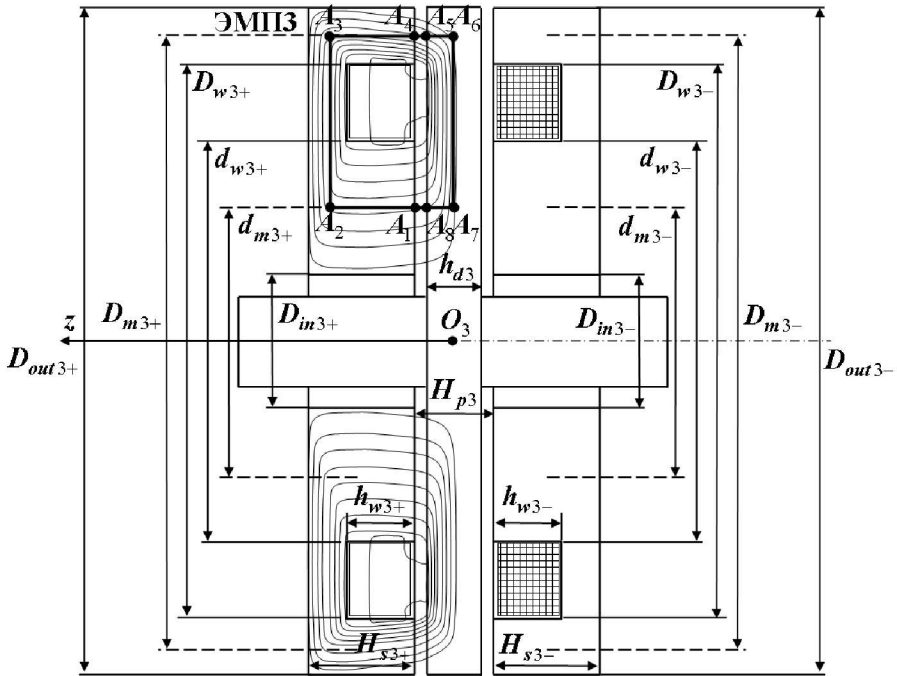


Рисунок 10 – Схематизация путей магнитных потоков в осевом ЭМПЗ

Магнитные сопротивления участков магнитной цепи ЭМПЗ (рис. 10):

1) полюсов (участки  $A_1A_2$ ,  $A_3A_4$ ):

$$R_{pk} = (H_{s3\pm} - h_{w3\pm}) / (2\mu_0\mu S_{pk}) \quad (k = 17, 18 "+", 19, 20 "-");$$

$$S_{pk} = \pi(d_{w\pm}^2 - D_{m3\pm}^2) / 4 \quad (k = 17 "+", 19 "-"); \quad (17)$$

$$S_{pk} = \pi(D_{out3\pm}^2 - D_{w3\pm}^2) / 4 \quad (k = 18 "+", 20 "-"),$$

где  $S_{pk}$  – площадь поперечного сечения полюса;

2) ярма статора между полюсами ( $A_2A_3$ ):

$$R_{sk} = \int_{d_{m3\pm}}^{D_{m3\pm}} \frac{dp}{\mu_0 \mu 2\pi p (H_{s3\pm} - h_{w3\pm})} =$$

$$= \frac{1}{2\mu_0 \mu \pi (H_{s3\pm} - h_{w3\pm})} \ln \left( \frac{D_{m3\pm}}{d_{m3\pm}} \right) \quad (k = 17''+, 19''-); \quad (18)$$

3) диска в радиальном направлении (участок  $A_6A_7$ ):

$$R_{ak} = \int_{d_{m3\pm}}^{D_{m3\pm}} \frac{dp}{\mu_0 \mu 2\pi p h_{d3}} = \frac{1}{2\mu_0 \mu \pi h_{d3}} \ln \left( \frac{D_{m3\pm}}{d_{m3\pm}} \right) \quad (k = 17''+, 19''-); \quad (19)$$

4) воздушного зазора под  $k$ -м полюсом и диска в радиальном направлении (участки  $A_1A_8$  и  $A_8A_7$  или  $A_4A_5$  и  $A_5A_6$ ):

$$R_{gk} = \frac{1}{g_{gk}} + \frac{h_{d3}}{2\mu_0 \mu S_{pk}}; \quad g_{gk} = \mu_0 \int_{S_k} \frac{dS}{h} \quad (k = 17, \dots, 20), \quad (20)$$

где  $g_{gk}$  – магнитная проводимость зазора под  $k$ -м полюсом,  $h$  – высота зазора под элементарной площадью полюса  $dS$ . Для ЭМПЗ магнитная проводимость зазора под  $k$ -м полюсом может определяться без учета или с учетом (21) взаимовлияния смещений в радиальном и осевом направлениях [10]:

$$g_{gk}(x_1, y_1, x_2, y_2, z_3) = \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_{D_{m3/2}}^{d_{w3/2}} \frac{\rho d\rho d\alpha}{h_{z3\pm}(\rho, \alpha)} \quad (k = 17''+, 19''-);$$

$$g_{gk}(x_1, y_1, x_2, y_2, z_3) = \mu_0 \int_0^{2\pi} \int_{D_{w3/2}}^{D_{out3/2}} \frac{\rho d\rho d\alpha}{h_{z3\pm}(\rho, \alpha)} \quad (k = 18''+, 20''-), \quad (21)$$

где  $h_{x3+}$  и  $h_{x3-}$  – высота зазора под элементарной площадью полюсов ЭМПЗ, расположенных со стороны положительного и отрицательного направлений оси  $z$  соответственно. При учете взаимовлияния смещений  $h_{x3\pm}$  зависит еще и от обобщенных координат  $x_1, y_1, x_2, y_2, z_3$ , а без учета только от  $z_3$ . Обоснование границ применимости упрощенных выражений  $h_{x3\pm}$  дано в [10].

5) рассеяния между соседними полюсами статора – пазов заполненных медью (участок между линиями  $A_1A_2$  и  $A_3A_4$ ):

$$R_{lk} = \int_{d_{w3\pm}}^{D_{w3\pm}} \frac{dp}{\mu_0 \mu_{Cu} 2\pi p h_{w3\pm}} = \frac{1}{2\mu_0 \mu_{Cu} \pi h_{w3\pm}} \ln \left( \frac{D_{w3\pm}}{d_{w3\pm}} \right) \quad (k = 17''+);$$

$$(k = 18''-). \quad (22)$$

Магнитные проводимости рассеяния, а значит и магнитные сопротивления рассеяния, между полюсами статора могут быть также определены по методике расчета плоского цилиндрического подъемного электромагнита на основе схемы путей потоков рассеяния [13, стр. 142].

В случае уточнения местоположения путей усредненных магнитных потоков рассеяния ( $\Phi_{87}, \Phi_{88}$  на рис. 10) магнитные сопротивления участков могут быть перераспределены между магнитными сопротивлениями полюсов



$R_{p17}, \dots, R_{p20}$  и воздушных зазоров  $R_{g17}, \dots, R_{g20}$  включением во вторые части исключенной из первых.

**7. Электромагнитная часть математической модели «ротор на ЭМП».** Таким образом, для рассмотренного варианта полного электромагнитного подвеса (рис. 3) ротора ЭМП содержат  $N = 18$  электромагнитных контуров с токами  $i_{ck}$ , активными сопротивлениями  $r_{ck}$  и входными напряжениями  $u_{ck}$  (управляющими сигналами). Насыщением и магнитным гистерезисом пренебрегаем. Тогда электромагнитная часть математической модели согласно (1) включает в себя  $N = 18$  дифференциальных уравнений первого порядка относительно потокоцеплений (эти уравнения соответствуют второму закону Кирхгофа для магнитных цепей и являются формой записи закона полного тока для каждого  $k$ -го контура системы):

$$\frac{\partial \Psi_{ck}}{\partial t} + r_{ck} \frac{\partial W}{\partial \Psi_{ck}} = u_{ck} \quad (k = 1, \dots, N), \quad (23)$$

где  $\Psi_{ck}$  – полные магнитные потоки через контуры катушек (потокоцепления),  $r_{ck}$  – активные сопротивления в цепях катушек (так как в (1)  $r_{cks} = 0$  при  $k \neq s$  [9]),  $W$  – энергия магнитного поля,  $u = (u_1, \dots, u_N)^T$  –  $N$ -мерный вектор-столбец управляющих напряжений.

Если принять, что магнитный поток, охватываемый каждым витком катушки одинаков, то суммарный или полный магнитный поток через контур катушки будет превосходить этот поток в количество раз равное числу витков катушки [15, 16]. Тогда потокоцепления в цепях ЭМП равны (см. рис. 7,9):

$$\Psi_{ck} = w_k \Phi_k; \quad \Psi_{ck+8} = w_{k+8} \Phi_{k+40} \quad (k = 1..8); \quad \Psi_{ck} = w_k \Phi_{k+64} \quad (k = 17, 18). \quad (24)$$

Причем, следует отметить, что полное потокоцепление  $\Psi_{ck}$   $k$ -го контура зависит не только от тока в  $k$ -м контуре, но и от токов других контуров магнитосвязанных с  $k$ -м контуром [16]. В нашем случае это учитывается при нахождении магнитных потоков из решения систем уравнений (6) и (15).

Учитывая только магнитное поле, сосредоточенное в областях вблизи некоторых участков ветвей, запишем энергию магнитного поля [16].

Плотность энергии магнитного поля, то есть энергия магнитного поля, запасенная в каждой единице объема  $V$  занятого полем [16]:

$$\varpi = \frac{W}{V} = \int_0^B H dB = \frac{HB}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} \quad (\text{так как } B = \mu_0\mu H \text{ при } \mu = \text{const}), \quad (25)$$

где  $H$  – напряженность магнитного поля,  $B$  – магнитная индукция.

Магнитный поток через площадь  $S_k$  участка магнитной цепи [16]:

$$\Phi_k = B_k S_k, \quad (26)$$

Магнитное сопротивление участка магнитной цепи [16]:

$$R_k = l_k / (\mu_0 \mu_k S_k), \quad (27)$$

где  $l_k$  – длина участка магнитной цепи,  $S_k$  – площадь поперечного сече-

ния.

С учетом (25), (26) и (27) энергия магнитного поля участка цепи:

$$W_k = \frac{B_k^2 V_k}{2\mu_0 \mu_k} = \frac{B_k^2 S_k l_k}{2\mu_0 \mu_k} = \frac{\Phi_k^2 S_k l_k}{S_k^2 2\mu_0 \mu_k} = \frac{1}{2} R_k \Phi_k^2. \quad (28)$$

Так как энергия всей магнитной цепи – есть сумма энергий участков этой цепи, то для ЭМП1, ЭМП2 и ЭМП3 имеем:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^8 (R_{pk} \Phi_k^2 + R_{gk} \Phi_{k+8}^2 + R_{sk} \Phi_{k+16}^2 + R_{lk} \Phi_{k+24}^2 + R_{ak} \Phi_{k+32}^2); \\ W_2 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^8 (R_{pk+8} \Phi_{k+40}^2 + R_{gk+8} \Phi_{k+48}^2 + R_{sk+8} \Phi_{k+56}^2 + R_{lk+8} \Phi_{k+64}^2 + R_{ak+8} \Phi_{k+72}^2); \\ W_3 &= \frac{1}{2} ((R_{p17} + R_{p18} + R_{s17}) \Phi_{81}^2 + (R_{p19} + R_{p20} + R_{s18}) \Phi_{82}^2 + \\ &\quad + R_{g17} \Phi_{83}^2 + R_{g18} \Phi_{84}^2 + R_{g19} \Phi_{85}^2 + R_{g20} \Phi_{86}^2 + R_{l17} \Phi_{87}^2 + R_{l18} \Phi_{88}^2 + R_{a17} \Phi_{89}^2) \end{aligned} \quad (29)$$

Энергия магнитного поля в магнитных цепях полного электромагнитного подвеса ротора на ЭМП, приведенного на рис. 3, равна:

$$W = W_1 + W_2 + W_3. \quad (30)$$

С учетом (30) и (24) система уравнений (23) приобретает вид (31)-(32):

$$\frac{\partial \Psi_{ck}}{\partial t} + \frac{r_{ck} R_{pk}}{w_k^2} \Psi_{ck} = u_{ck} \quad (k = 1, \dots, 16). \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_{ck}}{\partial t} + \frac{r_{ck} (R_{pk} + R_{p{k+1}} + R_{sk})}{w_k^2} \Psi_{ck} &= u_{ck} \quad (k = 17); \\ \frac{\partial \Psi_{ck}}{\partial t} + \frac{r_{ck} (R_{p{k+1}} + R_{p{k+2}} + R_{sk})}{w_k^2} \Psi_{ck} &= u_{ck} \quad (k = 18). \end{aligned} \quad (32)$$

Окончательный вид системы дифференциальных уравнений может быть получен после выбора схем попарного соединения катушек в ЭМП1 и ЭМП2 для реализации четырех электромагнитов в каждом из радиальных ЭМП с учетом выражений (4) при последовательном соединении или (5) – при параллельном. Так, например, в первом случае попарное суммирование уравнений 1-2, 3-4, ..., 15-16 в (31) позволяет прийти к СДУ 8 уравнений:

$$\frac{\partial (\Psi_{c2k-1} + \Psi_{c2k})}{\partial t} + \frac{r_{c2k-1} R_{p2k-1}}{w_{2k-1}^2} \Psi_{c2k-1} + \frac{r_{c2k} R_{p2k}}{w_{2k}^2} \Psi_{c2k} = u_k \quad (k = 1, \dots, 8), \quad (33)$$

которая должна быть дополнена 8-ю алгебраическими уравнениями относительно потокоцеплений, в соответствии с (4) при учете (2) и (30):

$$\frac{R_{p2k-1}}{w_{2k-1}^2} \Psi_{c2k-1} - \frac{R_{p2k}}{w_{2k}^2} \Psi_{c2k} = 0, \quad (k = 1, \dots, 8). \quad (34)$$

и, естественно, дифференциальными уравнениями (32).

**8. Пондеромоторные силы.** Первые слагаемые в правых частях уравнений (3) можно интерпретировать как обобщенные силы, обусловленные механическим воздействием магнитного поля, и являются электромагнитной реакцией подвеса. Такие силы называются пондеромоторными. Они имеют вид:

$$P_{\xi_r} = \frac{\partial W}{\partial \xi_r} (r = 1, \dots, M) \quad \text{или} \quad P_{q_r} = \frac{\partial W}{\partial q_r} (r = 1, \dots, M). \quad (35)$$

В нашем случае при их определении следует учитывать, что от обобщенных механических координат ( $\xi$  или  $q$ ) в выражении энергии магнитной энергии цепи ЭМП (28-30) зависят только магнитные сопротивления воздушных зазоров под  $k$ -м полюсом. Причем, в зависимости от выбранного способа их определения (с учетом или без учета взаимовлияния смещений в радиальном и осевом направлениях), магнитные сопротивления зазоров могут зависеть от различного количества обобщенных механических координат.

Если СДУ записывается относительно группы обобщенных координат  $q$  и учитывается взаимовлияние смещений, то для всех ЭМП –  $R_{gk} = R_{gk}(x_1, y_1, x_2, y_2, z_3)$ . Если же взаимовлияние не учитывается, то для радиальных ЭМП1 и ЭМП2 магнитные сопротивления зазоров имеют вид  $R_{gk} = R_{gk}(x_1, y_1)$  и  $R_{gk} = R_{gk}(x_2, y_2)$ , а для осевого ЭМП3 –  $R_{gk} = R_{gk}(z_3)$ .

Тогда пондеромоторные силы равны:

$$P_{q_r} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^8 \left( \Phi_{k+8}^2 \frac{\partial R_{gk}}{\partial q_r} + \Phi_{k+48}^2 \frac{\partial R_{gk+8}}{\partial q_r} \right) + \sum_{k=1}^4 \left( \Phi_{k+82}^2 \frac{\partial R_{gk+16}}{\partial q_r} \right) (r = 1..5), \quad (36)$$

где потоки  $\Phi_9, \dots, \Phi_{16}, \Phi_{49}, \dots, \Phi_{56}, \Phi_{83}, \dots, \Phi_{86}$  должны быть найдены из решения систем уравнений (6-7) и (15-16) с заменой в правых частях токов на потокосцепления в соответствии с выражениями (2), (24) и (29).

Механическая часть СДУ должна быть записана относительно одной группы координат. Если при нахождении сил используются координаты  $q$ , то в уравнениях (3) должна быть выполнена замена переменных группы  $\xi$  на  $q$ :

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + l_1 \theta_y; & y_1 = y_0 - l_1 \theta_x; \\ x_2 = x_0 - l_2 \theta_y; & y_2 = y_0 + l_2 \theta_x; \end{cases} \quad z_3 = z_0 - (l_2 + l_3). \quad (37)$$

При этом силы, действующие в точке  $O$  и находящиеся в правой части СДУ (3), связаны с пондеромоторными силами (36), действующими в центрах опорных участков ротора, следующим образом (см. рис. 2):

$$\begin{cases} P_{x0} = P_{x1} + P_{x2}; & P_{\alpha x} = -P_{y1} l_1 + P_{y2} l_2; \\ P_{y0} = P_{y1} + P_{y2}; & P_{\alpha y} = P_{x1} l_1 - P_{x2} l_2; \end{cases} \quad P_{z0} = P_{z3}. \quad (38)$$

**Заключение.** Основным предназначением взаимосвязанной магнитомеханической многомерной нелинейной математической модели абсолютно жесткого вращающегося ротора на управляемых электромагнитных подшипни-

ках, состоящей из дифференциальных уравнений (3) и (31-32) или (33-34), является создание на ее основе имитационной вычислительной модели [3,17], позволяющей проводить варианты расчеты на динамическую устойчивость, с целью выбора рациональных параметров подвеса и управляющих воздействий при различных конструктивных изменениях.

Основное отличие имитационной модели построенной с использованием предложенной математической модели – возможность более адекватного моделирования поведения ротора на ЭМП при его приближении к полюсам. Это позволит определить параметры системы автоматического регулирования и алгоритма управления, обеспечивающие устойчивость движения ротора в диапазоне отклонений, приближающемся к номинальному зазору.

**Список литературы:** 1. Официальный сайт фирмы Societe de Mecanique Magnetique S2M (Франция): <http://www.s2m.fr>. 2. Мартыненко Г.Ю., Смирнов М.М. Построение связанной многомерной нелинейной модели вращающегося ротора с управляемыми электромагнитными подшипниками // Вестник НТУ «ХПИ». – № 9, т. 8. – С. 143-151. 3. Мартыненко Г.Ю. Исследование устойчивых движений роторов на электромагнитных подшипниках при различных вариантах управления с помощью имитационной вычислительной модели / Интегрированные технологии и энергосбережение. – Харьков: ХПТУ, 2000. – № 2. – С. 88-96. 4. Патент № 2277190. Российская Федерация. МПК F16C 32/04. Способ дискретного управления электромагнитным подвесом вращающихся роторов / ОАО «Сумское НПО им. М.В.Фрунзе», НТУ «ХПИ»; Роговой Е.Д., Бухолдин Ю.С., Левашов В.А., Мартыненко Г.Ю., Смирнов М.М. – № 2003121317/11. – Заявл. 10.07.2003 г. Опубл. 27.05.2006 г. // Изобретения. Официальный бюллетень, 2006. – № 15. 5. Патент № 77665. Украина (UA). МПК F16C 32/04. Спосіб дискретного керування електромагнітним підвісом обертових роторів / ВАТ «Сумське НВО ім. М.В.Фрунзе», НТУ «ХПІ»; Роговий Є.Д., Бухолдин Ю.С., Левашов В.О., Мартиненко Г.Ю., Смірнов М.М. – № 2003076309. – Заявл. 08.07.2003 р. Опубл. 15.01.2007 р. // Бюл., 2007. – № 1. 6. G. Schweitzer, H.Bleuler and A.Traxler Active magnetic bearings. – Zurich: ETH, 1994. – 244 p. 7. Maslen E.H. Magnetic bearings / University of Virginia Department of Mechanical, Aerospace, and Nuclear Engineering Charlottesville, Virginia, 2000. – 229 p. 8. Журавлев Ю.Н. Активные магнитные подшипники: Теория, расчет, применение. – СПб.: Политехника, 2003. – 206 с. 9. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. В.Н.Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1979. – Т.2: Колебания нелинейных механических систем. / Под ред. И.И.Блехмана. – 351 с. 10. Мартыненко Г.Ю. Уточнение математической модели ротора на ЭМП за счет определения магнитной проводимости зазоров под полюсами с учетом взаимовлияния смещений в радиальном и осевом направлениях // Вісник НТУ «ХПІ». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ «ХПІ», 2006. – № 32. – С. 179-192. 11. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. В.Н.Челомей (пред.). – М.: Машиностроение, 1980. – Т. 3: Колебания машин, конструкций и их элементов. / Под ред. Ф.М.Диментберга и К.С.Калесникова. – 543 с. 12. Борисов Ю.М., Липатов Д.Н., Зорин Ю.Н. Электротехника. Учебник для ВУЗов. – М.: Энергоатомиздат, 1985. – 552 с. 13. Ротерс Электромагнитные механизмы. – М.: Государственное энергетическое из-во, 1949. – 521 с. 14. Смирнов М.М., Мартыненко Г.Ю., Бабенко И.Н. Конечнэлементный расчет магнитных цепей активных магнитных подшипников на основе уравнений магнитостатики / Вестник НТУ «ХПИ» Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2003. - № 12, т. 1. – С. 129-138. 15. Иродов Е.И. Основные законы электромагнетизма: Учеб. пособие для студентов ВУЗов. – М.: Высшая школа, 1991. – 289 с. 16. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Учебник для студентов энергетических и электротехнических ВУЗов. – М.: Высшая школа, 1973. – 752 с. 17. Мартыненко Г.Ю. Исследование устойчивости движения ротора в управляемых электромагнитных подшипниках с помощью нелинейной имитационной вычислительной модели / Проблемы машиностроения. – Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2005. – Т. 8, № 1. – С. 47-58.

Поступила в редакцию 14.04.2007